Nullstellenbestimmung von Parabeln:

Beispiele:

1. $y = x^2 - 10x + 16$ Bedingung: $y = 0$

$x^2 - 10x + 16 = 0$

Eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$ kann mit folgender Formel gelöst werden: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Den Term $(b^2 - 4ac)$ nennt man Diskriminante D.

D > 0: zwei Lösungen

D = 0: eine Lösung

D < 0: keine Lösung

$$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

$x_1 = 8 \quad N_1(8/0)$

$x_2 = 2 \quad N_2(2/0)$

2. $y = x^2 - 7x + 21$

$x^2 - 7x + 21 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 84}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{-35}}{2}$$

$\Rightarrow$ die Parabel hat keine Nullstellen

3. Bestimmen Sie die Anzahl und Lage der Nullstellen der Parabel p: $y = x^2 - 6x + k$ in Abhängigkeit von k.

$$x^2 - 6x + k = 0 \quad \Rightarrow x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot k}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4k}}{2}$$

1) $36 - 4k = 0 \quad \Rightarrow k = 9$

p hat eine Nullstelle bei x = 3

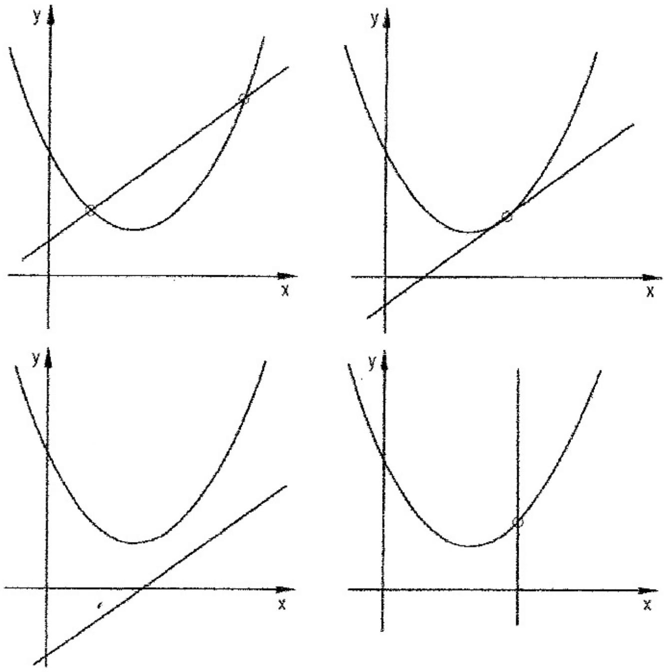
2) $36 - 4k > 0 \quad \Rightarrow k < 9$

p hat zwei Nullstellen bei $x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 - 4k}}{2}$ und bei $x_2 = \frac{6 - \sqrt{36 - 4k}}{2}$

3) $36 - 4k < 0 \quad \Rightarrow k > 9$

p hat keine Nullstelle

Schnittpunkte einer Parabel mit einer Geraden:



Beispiele:

1. $p: y = x^2 - 2x + 3$

   $g: y = 0{,}5x + 1{,}5$

   Bedingung für Schnittpunkte: $p = g$

   $x^2 - 2x + 3 = 0{,}5x + 1{,}5 \quad \Rightarrow x^2 - 2{,}5x + 1{,}5 = 0$

   $x_{1/2} = \dfrac{2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4 \cdot 1 \cdot 1{,}5}}{2} = \dfrac{2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 6}}{2} = \dfrac{2{,}5 \pm \sqrt{0{,}25}}{2} = \dfrac{2{,}5 \pm 0{,}5}{2}$

   $x_1 = 1{,}5 \quad x_2 = 1$

   y-Koordinaten der Schnittpunkte: x einsetzen in p (oder g)

   $y_1 = 0{,}5 \cdot 1{,}5 + 1{,}5 = 2{,}25 \quad \Rightarrow S_1(1{,}5 / 2{,}25)$

   $y_2 = 0{,}5 \cdot 1 + 1{,}5 = 2 \quad \Rightarrow S_2(1/2)$

2. $p: y = 0{,}5x^2 - x + 1{,}5$
$g: y = -2x + 1$

$0{,}5x^2 - x + 1{,}5 = -2x + 1 \quad \Rightarrow 0{,}5x^2 + x + 0{,}5 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}{1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-1}}{1} = -1$$

$y = -2 \cdot (-1) + 1 = 3 \quad \Rightarrow S(-1/3)$

Die Gerade berührt die Parabel nur in einem Punkt.

Eine solche Gerade nennt man auch Tangente.

3. Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Parabel $p: y = 0{,}5x^2 - x + 1{,}5$ und der Geradenschar $g_a: y = -2x + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von a.

$0{,}5x^2 - x + 1{,}5 = -2x + a \quad \Rightarrow 0{,}5x^2 + x + 1{,}5 - a = 0$

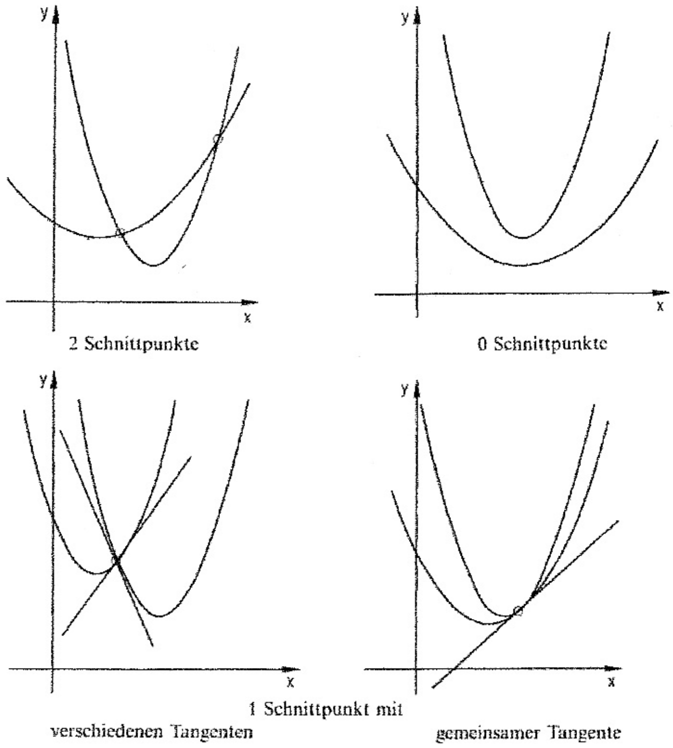
$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (1{,}5 - a)}}{1} = \frac{-1 \pm \sqrt{2a-2}}{1}$$

1) $2a - 2 = 0 \quad \Rightarrow a = 1$
ein gemeinsamer Punkt bei x = -1 $\quad \Rightarrow BP(-1/3)$

2) $2a - 2 > 0 \quad \Rightarrow a > 1$
zwei gemeinsame Punkte

3) $2a - 2 < 0 \quad \Rightarrow a < 1$
kein gemeinsamer Punkt

Schnittpunkte zwischen zwei Parabeln:



2 Schnittpunkte

0 Schnittpunkte

1 Schnittpunkt mit verschiedenen Tangenten

1 Schnittpunkt mit gemeinsamer Tangente

Beispiele:

1. $p_1: y = x^2 - x + 2{,}25$
   $p_2: y = 0{,}5x^2 + 0{,}5x + 1{,}125$

   $x^2 - x + 2{,}25 = 0{,}5x^2 + 0{,}5x + 1{,}125 \quad \Rightarrow 0{,}5x^2 - 1{,}5x + 1{,}125 = 0$
   $x_{1/2} = \dfrac{1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}125}}{1} = \dfrac{1{,}5 \pm \sqrt{0}}{1} = 1{,}5$
   $y = 1{,}5^2 - 1{,}5 + 2{,}25 = 3 \quad \Rightarrow S(1{,}5 / 3)$
   Die Parabeln haben nur einen Punkt gemeinsam.

2. $p_1: y = -x^2 + 2x + 3$
   $p_2: y = x^2 - 4x + 3$

   $-x^2 + 2x + 3 = x^2 - 4x + 3 \quad \Rightarrow -2x^2 + 6x = 0$
   $\Rightarrow -2x(x - 3) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 3$
   $y_1 = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \quad \Rightarrow S_1(0/3)$
   $y_2 = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0 \quad \Rightarrow S_2(3/0)$

3. Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Parabel $p_a: y = -x^2 + ax + 3$ mit $a \in \mathbb{R}$ und der Parabel $p_2: y = x^2 - 4x + 3$ in Abhängigkeit von a.
   $-x^2 + ax + 3 = x^2 - 4x + 3 \quad \Rightarrow -2x^2 + ax + 4x = 0 \quad \Rightarrow -2x^2 + (a+4)x = 0$
   $\Rightarrow x(-2x + a + 4) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \qquad -2x + a + 4 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = \dfrac{1}{2}a + 2$
   1) ein gemeinsamer Punkt, wenn $\dfrac{1}{2}a + 2 = 0 \quad \Rightarrow a = -4$
      $\Rightarrow x = 0 \quad y = 3 \quad \Rightarrow BP(0/3)$
   2) zwei gemeinsame Punkte für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

Lösungsverfahren für spezielle quadratische Gleichungen

(1) Reinquadratische Gleichungen

Beispiele:

1) $x^2-4=0 \quad \Rightarrow x^2=4 \quad \Rightarrow x_1=-2 \quad x_2=2$

2) $-kx^2+k^3=0 \quad (k\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$

$kx^2=k^3 \quad \Rightarrow x^2=k^2 \quad \Rightarrow x_1=-k \quad x_2=k$

3) $2(x-t)^2=0 \quad (t\in\mathbb{R})$

$(x-t)^2=0 \quad \Rightarrow x-t=0 \quad \Rightarrow x=t$

(2) Ausklammern

Beispiele:

1) $2x^2-5x=0 \quad \Rightarrow x(2x-5)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad 2x-5=0 \Rightarrow x_2=\frac{5}{2}$

2) $\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x=0 \quad \Rightarrow \frac{2}{3}x(x-4)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=4$

(3) Faktorisieren

Beispiele:

1) $x^2-5x+6=0$

$(x-2)(x-3)=0 \quad \Rightarrow x_1=2 \quad x_2=3$

Hat die quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ die Lösungen x_1 und x_2, so ist: $x_1+x_2=-p$ $x_1\cdot x_2=q$ (Satz von Vieta)

2) $x^2-7x-30=0 \quad \Rightarrow (x-10)(x+3)=0 \quad \Rightarrow x_1=10 \quad x_2=-2$

3) $x^2-8x+16=0 \quad \Rightarrow (x-4)^2=0 \quad \Rightarrow x=4$

4) $3x^2+45x+150=0 \quad \Rightarrow 3(x^2+15x+50)=0 \quad \Rightarrow x^2+15x+50$

$\Rightarrow 3(x+5)(x+10)=0 \quad \Rightarrow x_1=-5 \quad x_2=-10$